



SuPerPixéPoLis

Modelos para resolver problemas matemáticos

Metacognición y creatividad

José Antonio Fernández Bravo

José Antonio Fernández Bravo

Modelos para resolver problemas matemáticos



Metacognición y creatividad

Esta edición es un resumen del libro *Resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños*, de José Antonio Fernández Bravo, Grupo Mayéutica, 2010, premiado con el galardón de «Metodología creativa», en Italia, Reggio Emilia, 2009.

PROYECTO EDITORIAL

Departamento de proyectos educativos GELV

EDICIÓN

Área de ediciones educativas de Primaria Edelvives

CORRECCIÓN

José María Sotillos

PROYECTO VISUAL Y DIRECCIÓN DE ARTE

Departamento de imagen y diseño GELV

DISEÑO GRÁFICO DE CUBIERTA

SPR-MSH.COM

ILUSTRACIÓN DE INTERIORES

David Pérez Marín

COORDINACIÓN DE PRODUCCIÓN Y MAQUETACIÓN

Área de producción editorial GELV

IMPRESIÓN

Edelvives Talleres Gráficos

Certificado ISO 9001

Impreso en Zaragoza, España

ISBN: 978-84-263-9180-3

Depósito legal: Z 72-2014

Impreso en España. Printed in Spain

© Del texto, José Antonio Fernández Bravo, 2014

© De edición, Grupo Editorial Luis Vives, 2014

Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley.

Dirijase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com; 917 021 970 / 932 720 447).

ÍNDICE

1. Hacia una epistemología de la educación matemática.....	7
La fenomenología de la educación matemática en los procesos de enseñanza y aprendizaje.....	11
El binomio creatividad y matemáticas	12
2. El quehacer matemático en la resolución de problemas	13
Los factores que intervienen en el aprendizaje de la resolución de problemas.....	14
Las estrategias de resolución	17
Fases en la resolución de problemas	19
3. Obstáculos y dificultades en la resolución de problemas	23
4. Metamodelos y modelos para la generación de estrategias en la resolución de problemas	29
• Metamodelos generativos.....	30
• Metamodelos de estructuración	34
• Metamodelos de enlaces.....	36
• Metamodelos de transformación	43
• Metamodelos de composición.....	54
• Metamodelos de interconexión	57
Bibliografía.....	66

PRÓLOGO

La matemática es una actividad mental, dinámica y despierta en sueño libre; sin embargo, se sigue imponiendo, sin carácter científico y bajo la perezosa sospecha de la apatía, ese dogma que prescribe: «así se hace», «así se piensa», «así se resuelve», «así se calcula»...; protocolo aburrido y penumbra intelectual de un extraño secreto que, quizás, no se sepa transmitir.

La perspectiva con la que este libro se enfoca no es la de envolver al profesorado en indicaciones autorizadas, sino en aquella que permite adentrarse en la búsqueda de la flexibilidad y la originalidad de las ideas, para favorecer el desarrollo de la creatividad del alumno, a través de la invención y la reconstrucción de situaciones problemáticas. La creatividad es una faceta de la inteligencia que debe formar parte de la resolución de problemas.

Los vínculos y relaciones entre los conceptos matemáticos y las situaciones del entorno social en el que el alumno despliega su actividad se deben tanto a la comprensión de los conceptos como a la extensión creativa de estos. No se persigue, en un primer momento, la solución correcta del problema matemático, sino descubrir fallos, producir estrategias, reforzar la seguridad personal y el interés por la variedad de actividades.

Comprender las estrategias utilizadas por sus compañeros contrastando sus ideas sugiere más al aprendizaje que las profundas informaciones que se les pueda ofrecer. La distancia más corta entre la enseñanza y el aprendizaje es un buen desafío.

De este modo, se hace necesario partir de su vocabulario, atender y respetar las situaciones que tengan mayor relación con sus experiencias, e incluso provocar otras nuevas como, por ejemplo, representar teatralmente una situación problemática donde se generen ideas antes de utilizar número alguno y donde el error forme parte del proceso de aprendizaje sin prejuicio alguno en relación con el desarrollo del conocimiento.

Uno de los mayores problemas con que se enfrentan las matemáticas es el de explicar a los demás de qué tratan. [...] El simbolismo y expresiones formales de esta materia, su desconcertante terminología, su aparente deleitarse con cálculos larguísimos tiende a ocultar su auténtico carácter. [...] El objetivo de las matemáticas son los conceptos y ver el modo en que los diferentes conceptos se relacionan unos con otros. [...] No se trata simplemente de hallar la respuesta correcta, sino más bien de comprender por qué existe una respuesta. Ian Stewart, 2004: 13-14

1

HACIA UNA EPISTEMOLOGÍA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La matemática es una actividad mental. El pensamiento matemático es uno y no varios. Su instrumento no es el cálculo, sino el razonamiento.

- Si la matemática es una actividad del pensamiento, entonces no podremos encontrarla en ningún objeto o colecciones de objetos.
- El saber matemático no puede medirse por la cantidad de ejercicios que hacen los niños, sino por la actividad mental realizada para interpretar, resolver, formular, calcular y aplicar correctamente.

- ▶ No existe un cálculo mental y un cálculo escrito. El único cálculo que existe es el primero; la mente no piensa de una forma con bolígrafo y de otra distinta sin él.
- ▶ En la matemática no existen temas, sino estructuras. La composición y descomposición del número de una cifra se podrá aplicar a otros números de otras cifras: si $5 = 3 + 2$, entonces $50 = 30 + 20$; y 505, por ejemplo, será igual a $300 + 200 + 3 + 2$. Por eso, es necesario huir de los vagos y superficiales temas que presentan los tiránicos libros de texto –tan agresivos para el conocimiento por su fidelidad al contenido– y buscar las estructuras básicas que nos permiten saber matemáticas.
- ▶ Son pilares fundamentales para el desarrollo del pensamiento matemático la observación, la intuición, la creatividad, el razonamiento y la emoción.

La matemática es consistente y, lo que afirma o niega, posee verdad o falsedad universal demostrable.

- ▶ «Consistente» significa que, sobre el mismo sistema de axiomas, no puede deducirse la verdad de una proposición y, simultáneamente la verdad de su contraria. Cuando a los niños les decimos algo y más adelante ponemos un pero a ese algo que lo contradice, estamos derivando la explicación de un sistema didáctico inconsistente. Por ejemplo, decimos que restar es quitar; no obstante, si me quitan 3 euros por la mañana y 2 por la tarde, me han quitado 5 euros; en este caso sumamos.
- ▶ Lo que se afirma o niega es verdad o falso para todos. Expresiones como «esta cuerda es larga» o «32 es un número grande» no pertenecen al campo de la matemática.

- La demostración es la actividad más importante ligada al pensamiento matemático. Si tenemos esto en cuenta, adaptaremos procedimientos que preparen para la futura actividad. Se trata de poner en todo momento a disposición del alumno mecanismos válidos de autocorrección: es importante que comprueben, que verifiquen, para que, más tarde, puedan demostrar.
- La autocorrección es imposible sin la clara comprensión de los conceptos, relaciones y propiedades. Se hace, entonces, necesario basar la educación en la experiencia, el descubrimiento y la investigación –permitiendo que el alumno conquiste el concepto–, sin corregir con «bien» o «mal» –o expresiones semejantes– la actividad que el niño realiza en el proceso de aprendizaje.
- El desafío, el reto, la formulación y la resolución de problemas son procedimientos del quehacer matemático; más que decir cómo se piensa, hay que provocar al pensamiento para cultivar el esfuerzo intelectual que exige el entendimiento de ideas razonables.

La matemática estudia conceptos y propiedades, establece relaciones y genera modelos a través de campos numéricos, algebraicos, espaciales, probabilísticos... Posee un lenguaje propio con el que identifica esos conceptos, propiedades y relaciones.

- La comprensión de conceptos es la materia prima para establecer relaciones. El lenguaje propio de la matemática es más que necesario, pero si ha de ser fructífero y no perturbador, este será el punto de llegada y no el punto de partida.
- Existen numerosas formas de llegar al resultado, y no una sola. Expresiones como «así se suma», «así se resta», «así se calcula»... no

ayudan a la interiorización de los procesos ni a la intelectualización de las ideas.

- Hay que distinguir símbolo de concepto. El concepto hace referencia al significado, y el símbolo, a su representación. Actualmente, algunos libros de texto confunden una y otra cosa, consiguiendo una indebida e imprecisa apropiación del concepto: «El cero es un donuts», «El 6 es el número que no quiso ser cero»...

La matemática se construye mediante procesos lógicos de secuenciación.

- La adquisición de conocimientos posee grados de comprensión, y las actividades propuestas tendrán que contemplarlos. El proceso –por ejemplo estimación, aproximación, precisión– es un estado ligado y no un conjunto de ejercicios desprovistos de significado.

Las ideas matemáticas son precisas y rigurosas, distinguiendo perfectamente lo esencial de lo accidental.

- Precisión implica expresarse con el mínimo discurso a partir del cual se puedan establecer las necesarias relaciones que, mediante el razonamiento, completen el conocimiento deseado. La expresión « a menos b es igual a c », $a - b = c$ porque $c + b = a$.

Esta explicación es suficiente para todo número a , b y c conocido por el alumno si, y solo si, el alumno sabe sumar.

- Se suele confundir rigor con formalización; rigor es, ante todo, claridad mental.

1.1

LA FENOMENOLOGÍA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

- La enseñanza de la matemática tiene, entre otras tareas, una fundamental: conseguir en el que aprende claridad en los conceptos, razonamiento correcto y capacidad para establecer relaciones.
- El que enseña debe preocuparse de **dominar su materia** y **escuchar** al niño, dirigiendo todos sus esfuerzos a que el alumno aprenda de forma adecuada, quiera saber, se sienta bien sabiendo y aplique correctamente lo que sabe.
- El avance educativo supone no solo saber decir, sino saber hacer lo que se sabe decir, así como obtener un mayor rendimiento con un menor esfuerzo. Hoy se da mucho contenido y se produce poco conocimiento. Semejante error se comete tanto cuando se intenta que un niño aprenda algo que supera su comprensión, como cuando se intenta disminuir la cantidad de conocimiento y facilitar el esfuerzo intelectual que un niño puede desplegar.
- La fiabilidad de lo que un profesor enseña se mide por la validez de lo que sus alumnos son capaces de hacer sin él.
- Actualizarse no es imitar procedimientos que están de moda, sino conseguir, en tiempo real y con los niños de hoy, los objetivos marcados.
- No todos los alumnos tienen la misma capacidad para aprender matemáticas, pero sí que tienen todos la misma necesidad de aprenderlas. La tarea escolar consiste en cubrir las necesidades, y no en clasificar capacidades.

Los materiales que se pueden utilizar en la enseñanza de la matemática son muchos, pero seguro estoy de dos: la realidad y la evidencia.

1.2

EL BINOMIO CREATIVIDAD Y MATEMÁTICAS

El pensamiento es, en sí mismo, un acto creativo: «¿qué pasaría si...?», «supongamos que...» son expresiones que dibujan el camino para el desarrollo de la **creatividad**, es decir, estimulan la capacidad de crear algo. Despertar el pensamiento del alumno para buscar estrategias, formular preguntas, verificar soluciones, buscar otras formas de llegar a un resultado correcto... forma parte del binomio creatividad y matemáticas.

La matemática es una actividad mental; no me cansaré de repetirlo. El pensamiento matemático se desarrolla cuando se hace matemática, y hacer matemática implica, sobre todo, establecer relaciones. El rigor va unido a la matemática desde las primeras experiencias que el niño tiene para conseguir conocimiento. Pero **rigor es**, ante todo, **claridad mental**.

Toda acción lógica que opere significativamente en el aprendizaje de la matemática debe realizarse desde la enseñanza:

- La educación debe basarse en la experiencia, el descubrimiento y la construcción de los conceptos, procedimientos y estrategias. Ha de evitar estrategias de falsación, así como el recurso a los términos «bien» o «mal» como autoridad que sustituye a la evidencia.
- Ha de atender a la manipulación de materiales con actividades que optimicen el entendimiento, que provoquen, desafíen, motiven, porque actualizan las necesidades del alumno. El lenguaje en la presentación de las actividades o enunciación de los conceptos debe ser claro y preciso. Se trata de potenciar la autoestima, confianza, seguridad... del alumno.
- Habituar al alumno a explicar sus conclusiones con argumentos lógicos, evitando el «porque sí». Es preciso familiarizarlos con las reglas de la lógica para conseguir el desarrollo del pensamiento.

Algunos alumnos y también otras personas sostienen que se requieren cualidades mentales especiales, que muy pocos poseen, para comprender la matemática. Los que realmente han trabajado en este campo, los que han tenido mucha experiencia en la enseñanza de la matemática con todos los tipos de alumnos, han abandonado generalmente esta opinión, por lo menos en lo que concierne a la matemática que corresponde a las enseñanzas Primaria y Secundaria. L. W. Young, 1947: 59

2

EL QUEHACER MATEMÁTICO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La matemática, antes que ser disciplina de cálculo, tiene que ser oficio de comprensión: antes de exigir la respuesta con exactitud y precisión en el menor tiempo posible, hay que permitir el razonamiento en el tiempo que marque la capacidad de los alumnos. No es cuestión de que acumulen contenidos, sino de que adquieran conocimientos. El pensamiento no actúa con lo que nosotros les hemos enseñado, sino con lo que ellos han aprendido.

Cuando el alumno inventa un problema a partir, por ejemplo, de una solución dada, recorre fases de solidez contrastada como elaborar, ejecutar, comprender, verificar... El alumno no ha seguido un modelo, lo ha intuido por necesidad.

2.1

LOS FACTORES QUE INTERVIENEN EN EL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La orientación general del alumno para la resolución de problemas, la exposición de técnicas de trabajo, la atención a la diversidad... son campos y ámbitos afines a un sistema de relaciones socio-afectivas: el grupo-aula. «Es esencial [...] que no se pierdan de forma irrecuperable los alumnos de menor rendimiento por hacerlos trabajar demasiado rápidamente, y que no se condene a los más capaces a hacer ejercicios repetitivos teniendo como sola recompensa que se les ponga un «bien» con ellos» (ICMI, 1986: 46).

La comunicación que se desarrolla en el aula está ligada al desarrollo social, define la organización interactiva y la estructura socio-afectiva del grupo. Respetar al alumno supone considerar sus ritmos, escuchar sus respuestas, permitir la reflexión –como diálogo interior– y el trabajo en pequeños grupos o en gran grupo. Stenhouse sostenía, con lógica, los siguientes principios de procedimiento (Elliott, 1994: 85):

1. La actividad central del aula debe ser el diálogo en vez de la instrucción.
2. Ha de protegerse la divergencia de puntos de vista.
3. El criterio que rijan la actuación del profesor tiene que ser la neutralidad de procedimiento.

Existen ocasiones en las que el trabajo personal antecede al diálogo entre todos. No ha de entenderse esta idea como una forma de posesión individual, sino como la instauración de un campo de relaciones comunicativas. ¿Qué decisión se puede tomar por la palabra si no se sabe de qué se está hablando? Se le plantea al alumno la realización individual de una situación problemática. La deliberación por todos los compañeros del

trabajo realizado no queda excluida, sino ordenada. Esta deliberación, cuando el profesor actúa de manera que permita la construcción de los distintos planteamientos¹, genera un clima de tolerancia donde los factores competitivos son sustituidos por elementos cooperativos de adaptación y adecuación.

El alumno expone libremente las estrategias de resolución utilizadas; la actitud de escucha y la actitud crítica de las conjeturas expuestas se contextualizan formalmente. La solución del problema se construye junto con el alumno expositor, defendiendo las consideraciones abiertas, refutándolas o aceptándolas. La seguridad en uno mismo adquiere la fuerza que necesita para su desarrollo.

Las situaciones problemáticas que se propongan en el aula infundirán en el alumno la confianza en sus propias capacidades, brindándole la esperanza de conquistar el dominio de la actividad y eliminando el miedo que supone la equivocación y la incertidumbre.

Si hay algo que no pertenece al pensamiento matemático es la arbitrariedad. Construir una pregunta a partir de un enunciado dado, inventar un enunciado a partir de una pregunta y su solución, buscar los datos significativos de la situación problemática a partir del proceso de resolución expuesto... no significa que se abran las puertas y se anime a entrar a las causas de la suerte y los efectos del azar; más bien, todo lo contrario: se trata de encontrar la unicidad lógica desde la pluralidad de alternativas de todas las posibles formas de hacer.

¹ «La atención del maestro debería centrarse en el pensamiento del niño y no en su capacidad para escribir respuestas correctas. El pensamiento de los niños se desarrolla a partir de su intuición y su lógica naturales, y los educadores deberán favorecer este desarrollo en vez de buscar las definiciones de objetivos ajenos a esta manera de pensar» (Kamii, 1993: 97).

El gusto por la resolución de problemas no viene dado ni por la permisividad de todo lo que se le ocurra al alumnado ni por la facilidad del planteamiento de la situación que se le expone. El verdadero placer surge con el éxito, cuando se ha tomado conciencia, en el camino de su conquista, tanto de los aciertos como de los errores.

En el aspecto formativo de la matemática, el éxito no consiste en llegar a un resultado, sino en establecer una dinámica de relaciones lógicas en torno a unos elementos diferenciados y claramente definidos. Si el alumno considera que el «bien» se consigue llegando a un resultado, se frustrará cuando no pueda llegar a él o inventará uno cualquiera con el único fin de hacer ver a los demás que el también quiere obtener un «bien». La difícil tarea de conseguir que el alumno disfrute de sus errores² convirtiéndolos en conocimiento es un arte que hay que dominar.

La experiencia propia de la investigación en la resolución del problema proporciona una satisfacción por descubrir la solución. No puede estar, por ello, esta enseñanza basada en la arbitrariedad, carente de contenido y motivación estilística, intelectual y temperamental. Cuando un problema es de difícil solución para el grupo, no se debe prescindir de él³. Es necesario esperar a que el talento y el esfuerzo de algunos alumnos lo descubran. Estos alumnos tendrán el valor intelectual reconocido de conseguirlo y el valor social de poder comunicárselo a los demás.

² Es conocimiento universal el hecho de considerar en el error parte del proceso de aprendizaje. Se dice «en el error» y no al «error» mismo debido a que el aprendizaje toma cierto significado en la extensión que produce cometer un error cuando se hace consciente en el pensamiento. Esta idea aparece de manera implícita en las formulaciones y opiniones de muchos autores: Polya (1966), Pooper (1973) y Guétmanova (1989).

³ «Este placer inefable al lado del cual todos los demás deleites de la vida se reducen a pálidas sensaciones, indemniza sobradamente al investigador de la penosa y perseverante labor analítica, precursora, como el dolor del parto, de la aparición de la nueva verdad» (Ramón y Cajal, 1982: 88-89).

2.2

LAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

En el terreno educativo, las estrategias de resolución se relacionarían con actividades tales como intentar poner en relación la nueva información con la que ya poseemos, hacerse preguntas y utilizar analogías y modelos que ayuden a la comprensión (Gagné, 1991).

Las estrategias de elaboración deben permitir crear las reglas, no seguir-las. Si se sigue la regla, se habitúa al alumno a actuar de una determinada manera; ¿sabrá qué hacer cuando esa regla no sea de aplicación? Si las pautas se crean en un contexto de investigación y en un entorno de descubrimiento, se sabe por qué y para qué se han creado y a partir de qué necesidad se han generado. Podría decirse: «Al calcular, las reglas te parecen inexorables; sientes que solo puedes hacer eso y no otra cosa, si quieres seguir la regla» (Wittgenstein, 1987: 279).

El celo de explicar al niño las distintas formas de hacer anula, en cierto modo, la creatividad. En cálculo, en situaciones problemáticas..., cuando el alumno sigue la regla, la información «esto es así» no solo le está enseñando que «esto» es «así», sino que todo lo que no sea «así» no es «esto». «Nuestra enfermedad es la de querer explicar» (Wittgenstein, 1987: 281). Es el alumno el que escribe los criterios, el que los codifica. Nosotros decodificamos sus signos en tanto pertenecen a un lenguaje y simbología matemáticos, a una nomenclatura y unas formas científicas de proceder, pero después, y solo después, de que nos hayan manifestado sus particulares creaciones. La estrategia de elaboración debe conseguir que el alumno acceda a la construcción de criterios necesarios.

De lo que estamos hablando, pues, es de la elaboración causal de la estrategia de elaboración. La diferencia reside en que la estrategia de elaboración pertenece al alumno, y la elaboración de actividades en las que estas

estrategias sean posibles, al profesor. La función de un método de intervención en el que se plantean una serie de actividades no es la de indicar las distintas formas de hacerlas, sino la de favorecer la creación de posibles formas de hacer.

Actualmente, la resolución de un problema se plantea en cuatro fases: comprender el problema, concebir un plan, ejecutarlo y ver de manera retrospectiva. Estas fases representan las partes del proceso de elaboración, pero no forman parte de las estrategias del proceso creativo. Lo que necesita el alumno son situaciones significativas que le aporten posibilidades a la hora de enfrentarse a dicha resolución. Cuando a un alumno se le propone un problema, lo primero que hace es leerlo, pero leerlo significa seguir unas palabras que el cerebro descodifica para proyectar la idea de lo que ha leído. Esa fotografía mental va a permitir que el alumno enuncie el problema con sus palabras, estableciendo una dinámica de relaciones que se corresponde con lo que él ha entendido.

Las etapas aparentemente necesarias para la resolución de problemas son las siguientes: **elaboración**, **enunciación**, **generación de ideas**, **transcripción simbólica de las ideas** –traducción al lenguaje matemático del plan abordado en la generación de ideas–, **realización** –utilización de los instrumentos que permiten llevar a cabo las ideas traducidas que, en nuestro caso, no son otras que las reglas de cálculo de las cuatro operaciones básicas– y **contrastación** –es decir, el establecimiento de una correspondencia entre el resultado obtenido y todas y cada una de las etapas anteriores, estudiando la concordancia lógica en función de la respuesta que se haya indicado–.

Las primeras situaciones problemáticas a las que se tiene que enfrentar el alumno son aquellas en las que el número no existe, es secundario o va apareciendo en la medida que se considera necesario, y en este orden.

«Se deja caer una pelota que está encima de un armario y una pelota que está encima de una silla. ¿Qué pelota llegará antes al suelo?». Partamos, por ejemplo, de esta situación y analicemos, mediante el diálogo, cómo ha sido elaborada, cómo se ha plasmado en las mentes de los alumnos y cuáles son las ideas que pueden generar. Se trata de que los pequeños adquieran confianza y seguridad en sí mismos, de que todos puedan hablar, de que se enfrenten a una pluralidad de alternativas: ¿se han dejado caer las dos pelotas a la vez?, ¿dónde has supuesto que estaba la silla?, ¿podría estar la silla en una posición más alta que el armario?, ¿crees necesario completar el enunciado para contestar con seguridad?

Otra situación problemática que se puede plantear en estos primeros momentos es la siguiente: «Me he quedado sin dinero» (sí, ya está). A partir de aquí hay que animar a los alumnos a que elaboren, que enuncien, que busquen lo necesario, que determinen lo que es lógico, que construyan lo que falte: ¿por qué te has quedado sin dinero?, ¿cuánto dinero llevabas?, ¿has prestado dinero a algún amigo?, ¿te has comprado algo?, ¿te has quedado sin dinero antes o después de comprarlo?...

2.2

FASES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Hay que considerar las etapas para el aprendizaje de la resolución de problemas como distintos momentos por los que el alumno debe pasar. Se pueden establecer, así, fases de resolución en la medida en que la necesidad de estas haya sido interiorizada significativamente mediante una libertad de acción creativa con posibilidades de extensión impredecibles.

El centro de enseñanza nunca podrá poner a disposición del alumno todos los problemas que en un futuro tendrá que resolver, pero sí podrá

hacer que se enfrente fuera de él a la resolución de cualquier problema con una disposición al éxito. Llegados a este punto, podríamos sintetizar en seis las fases para la resolución de problemas:

1. Querer

Si el alumno no quiere resolver el problema, por las razones que sea, los objetivos de las subsiguientes fases perderán fuerza y los resultados se verán minimizados. Por el contrario, una voluntad firme aumenta las posibilidades de éxito en la resolución del problema.

2. Comprender

Las actividades de modelos de situaciones problemáticas provocan en el alumno la necesidad de comprensión del problema: lo que tengo, lo que me piden, a dónde tengo que llegar...

3. Formular ideas

Antes de concebir un plan, es necesario proceder a la formulación de ideas que se infieran de los datos y las condiciones del problema.

Supongamos que se pide al alumno que invente una situación cuya solución sea 43, a partir de esta pregunta: ¿cuántos cromos tienen entre los tres amigos?

Algunas de las ideas que, entre otras, podrían formularse son las siguientes:

- Los datos numéricos de la situación son menores que 43.
- Es posible que dos de ellos tengan el mismo número de cromos, pero no es posible que lo tengan los tres.

- Al menos uno de ellos tiene un número menor de cromos que el número de cromos de los otros dos amigos.

Las actividades de modelos de situaciones problemáticas deben propiciar, en esta fase, la observación y la intuición del alumno.

4. Investigar

Se potencia la generación de ideas por parte del alumno, no del profesor. Se desarrollan las facultades creativas de aquel, el razonamiento, la memoria, la flexibilidad y reversibilidad de pensamiento, su iniciativa y la aplicación de conocimientos.

5. Comunicar

El alumno expone su proceso de resolución, sus estrategias, sus ideas. Se genera un diálogo que sirve de contrastación del proceso. Se defienden las iniciativas y se aceptan las refutaciones. Se desarrolla la autonomía desde la explicación a los demás de su decisión creativa.

Las actividades de modelos de situaciones problemáticas deben contribuir a desplegar la inventiva del alumno para que la capacidad de diálogo sea eficaz, permitiéndole alcanzar la satisfacción que esta conducta proporciona, independientemente del éxito obtenido.

6. Sacar conclusiones

Esta es la fase en la que el alumno anota, en relación con el proceso de resolución que ha utilizado, las consideraciones que sobre el mismo haya acumulado en la fase de comunicación. El porqué de su acierto o de su error, la calidad de su comprensión del problema, las falacias incluidas en su razonamiento, los métodos utilizados por sus compañeros que han

demostrado la validez de la solución del problema: ensayo y error, generalización, analogía, particularización, empezar desde atrás...

Las conclusiones serán ideas susceptibles de ser utilizadas en sucesivas resoluciones de situaciones problemáticas. El respeto y la tolerancia, la aceptación de ideas, la honestidad, la colaboración y la asimilación de técnicas de base pertenecen al contexto de resolución de problemas. Si no hay comunicación, las conclusiones no se objetivarán y serán subjetivas en cuanto al modo de proceder del alumno o en relación con la forma de corregir del profesor.

Cuando la conclusión es estrategia para el profesor y elaboración para el alumno, el proceso de resolución, correcto o incorrecto, no importa como calificación del sujeto, sino como cualificación del aprendizaje a partir de unos fundamentos de los que somos capaces de responsabilizarnos.

Siempre que el ser humano se comunique mediante el lenguaje, toda didáctica que articule enseñanza con aprendizaje dominará el arte de preguntar.

No hay ningún truco mágico gracias al cual unos niños incapaces de reflexionar se convertirán, al llegar a adultos, en ciudadanos que piensen. Los medios tienen que ser consistentes con los fines o, como subrayó Kant, quien quiere el fin quiere los medios. Si queremos adultos que piensen, debemos educar niños que piensen.
M. Lipman, 1987: 7

3

OBSTÁCULOS Y DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Las investigaciones de Piaget y de numerosos investigadores posteriores⁴ nos han mostrado cómo los niños tienen sus propias ideas sobre las cosas. Las experiencias a las que su existencia los ha expuesto les han permitido elaborar ideas propias con las que explicar fenómenos y relaciones.

⁴ «Desde el punto de vista del aprendizaje —estudiado por el propio Piaget y su equipo a finales de los años 50 y más tarde por Inhelder (1972)—, el problema era de capital interés, ya que planteaba la incógnita de saber si las ideas que las criaturas se hacían sobre el mundo circundante consideradas erróneas podrían ser sustituidas por otras correctas y cuál era la mejor manera de conseguirlo» (Marimón, 1996 : 61).

Estas «concepciones implícitas» o «teorías ingenuas», como han venido denominándose, son verbalizadas por el niño ante situaciones o problemas propuestos por el adulto. Por eso, no es de extrañar que el alumno exprese erróneamente el enunciado de una situación problemática que tiene que completar a partir de una pregunta. Al tener unas ideas que permanecen implícitas, se expresan sin reflexión consciente de una manera espontánea. Esta falta de reflexión hace que, en ocasiones, sus explicaciones resulten incoherentes y contradictorias.

Podemos hablar de los errores más habituales que cometen los escolares en la resolución de problemas; son concepciones implícitas de su experiencia en este tema, de su educación e instrucción formal e informal. Citaremos, a continuación, alguno de estos errores y dificultades más habituales, estableciendo un contraste crítico entre las ayudas que proponen los métodos tradicionales y las que consideramos viables.

Dificultad 1: falta de comprensión del problema. Los alumnos no conocen el vocabulario específico utilizado, o la situación planteada no les es familiar.

- Ante esta dificultad se propone, como pauta de ayuda, que el alumno explique el problema con sus propias palabras. ¿Cómo va a ser eso posible si el no lo comprende? Por otro lado, se pide al alumno que intente recordar un problema que haya hecho anteriormente y que sea parecido al problema presentado. Ahora bien, ¿qué entiende el niño por «parecido»? Esto supone invitar al alumno, ante la incomprensión del problema que tiene que realizar, a que aplique, de forma azarosa, la resolución más reciente que la exigencia de rapidez le permita encontrar en su pensamiento.

- Se acepta la articulación de un aprendizaje en resolución de problemas en tanto que se es consciente del pensamiento relacional. Ante la dificultad que estamos tratando, no se parte de un problema, sino de la invención libre de un problema, para pasar, siguiendo la secuenciación procedimental, a inventar un problema a partir de una solución dada o, si se prefiere, a reconstruirlo a partir de la formulación de una pregunta.

Posteriormente, se pedirá la construcción a partir de la solución y de la operación que ha permitido obtenerla, incrementando la intelectualización de la dinámica de relaciones empleadas. La utilización de un vocabulario propio que cohesiona un contenido lógico favorece la comprensión y asegura la explicación de lo que han expresado los alumnos y de cómo lo han expresado.

Dificultad 2: empleo de estrategias de resolución incorrectas, incomprendión de la relación existente entre los datos y la pregunta. Los alumnos aplican operaciones al azar; lo importante es llegar a un resultado por absurdo que este sea.

- Ante esta dificultad se propone, habitualmente, al alumno que invente un problema más fácil. Ahora bien, ¿qué entiende él por «más fácil»? Por lo general, para los niños es «más fácil» aquel problema cuyos datos numéricos se representan con números menores que los incluidos en el problema original. Sin embargo, al no haber comprendido la relación conceptual del contenido matemático, el problema propuesto como «más fácil» es, con frecuencia, un absurdo. Supongamos que un niño no sabe resolver este problema: «Me han sobrado 87 euros de 200 euros que tenía. ¿Cuánto dinero he gastado?». Se le pide que invente otro más fácil, y el resultado puede ser el siguiente: «Me han sobrado 15 euros de 10 euros que tenía...».

- Se puede observar que el esquema del estatuto de ayuda de los métodos actuales requiere la «invención» para reducir las dificultades que se le presentan al niño. Podría entenderse que la invención es el instrumento utilizado para salvar los obstáculos que se encuentran en el camino de resolución. No obstante si esa técnica en la que nos apoyamos no se domina, se convierte en una vinculación borrosa que carece de funcionalidad de cara a los objetivos propuestos. En este sentido, el método de intervención que proponemos se apoya, en primer lugar, en el dominio de esta técnica, otorgando así significado a lo que, hasta ahora, se ha utilizado como «bastón de avance».

Los métodos tradicionales exponen también a la consciencia del alumno la necesidad de entender las partes que tiene el problema, así como la de ser capaz de enunciar el problema presentado de forma diferente. Un simple análisis de estas consideraciones de ayuda nos mostrará sin dificultad que, antes de resolver un problema, el alumno tiene que comprender la relación entre sus partes y saber expresar una misma relación de diferentes formas. Sin embargo, se aborda «después» lo que debe abordarse «antes».

La observación y el respeto a la actuación del alumno han favorecido el descubrimiento de situaciones tipo dirigidas como desafíos a las necesidades presentadas por el niño en la resolución de problemas. Estos desafíos, creados a partir de los errores detectados, se integran en el proceso de aprendizaje e intentan conseguir la intelectualización de los procesos seguidos para la eliminación de las dificultades.

Los alumnos que cometen errores suelen:

1. Pasar por alto las unidades o los elementos de la magnitud que se expresa en el enunciado en relación con la expresada en la pregunta.

2. Intuir lo que se les pregunta, sin pararse a reflexionar sobre el contenido real de la pregunta del problema.
3. Aplicar operaciones mediante asociación lingüística. Por ejemplo, si en la pregunta leen «quedan», restan; si leen «en total», suman...
4. Operar con los datos numéricos en el mismo orden en el que aparecen en el enunciado y utilizando todos los que aparecen.
5. Buscar, constantemente, la operación o conjunto de operaciones en la resolución del problema, sin pararse a pensar en si son o no necesarias.
6. Buscar una solución a toda costa, por absurda que sea.
7. Aplicar el último concepto aprendido o la última operación que se ha visto en clase.
8. Utilizar estrategias incorrectas cuando los datos numéricos se representan mediante números elevados, aunque comprendan la relación expresada con números más pequeños.

Supongamos, como situación tipo desafiante para intelectualizar de modo consciente procesos específicos, una información **que no incluye pregunta alguna**, y a partir de la cual se les pide a los alumnos que resuelvan el siguiente problema: «Un kilogramo de manzanas cuesta 1 euro y 35 céntimos; un kilogramo de naranjas, 1 euro y 98 céntimos; dos kilogramos de peras, 3 euros y 46 céntimos, y un melón, 4 euros y 50 céntimos. En un kilogramo de peras entran aproximadamente 5 piezas; en un kilogramo de naranjas, unas 4 piezas...».

Muchos alumnos se apresurarán a sumar sin orden ni concierto, utilizarán todos los datos y mezclarán elementos de distintas magnitudes, según se

ha expresado en las observaciones **1, 2, 4, 5 y 6** anteriores; otros dirán que no saben lo que hay que hacer porque falta la pregunta. El diálogo surge, entonces, de forma natural, al estudiar la necesidad de la **pregunta**.

Se observa cómo los mismos niños que no habían sido conscientes de su importancia participan con ideas que contradicen el pensamiento que, en un principio, les hizo obrar de una determinada manera.

También fuimos conscientes de la importancia que tiene la resolución de situaciones problemáticas el estudio de un problema totalmente cualitativo, donde el alumno encuentre por necesidad de relación los datos precisos para su solución: «Una persona, A, puede llevar con la fuerza de sus brazos objetos de un peso inferior a la mitad del peso real de esta persona. ¿Podría llevar dos bolsas llenas de arena?». Aquí no hay datos numéricos a los que aplicar una serie de operaciones; estos deben ser descubiertos en la medida en que se establece la comprensión de una dinámica de relaciones. Y es en esta medida en la que iremos recogiendo preguntas significativas de nuestros alumnos: ¿cuánto pesa la persona A?, ¿cuánto pesan las bolsas de arena?... De esta forma, iremos ofreciendo datos numéricos que podremos ir cambiando para observar la variabilidad de la solución (observación **8**), datos que podremos pedirles a los propios alumnos y que, dependiendo de la edad, podremos expresar utilizando distintos elementos de la magnitud representada.

La regularidad objetiva del trabajo consciente posibilitará observaciones fundamentales: la necesidad de los datos en relación con la pregunta y el contenido expresado (observaciones **2, 4, 5 y 7**), la respuesta cualitativa de un proceso cuantitativo (observación **6**), la atención que merece la magnitud expresada (observación **1**)...

“Crear es inventar posibilidades, es decir, encontrarlas. [...] Lo posible, que aún no existe, surge de la acción de la inteligencia sobre la realidad. Las cosas tienen propiedades reales, en las que inventamos posibilidades libres” J. A. Marina, 1994:21

4

METAMODELOS Y MODELOS PARA LA GENERACIÓN DE ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Más que la búsqueda del desafío a través de la resolución de problemas, nos proponemos la construcción del problema a partir de distintos bloques de desafíos. Estos bloques los hemos denominado «metamodelos».

Un metamodelo se puede considerar como el conjunto de clases de modelos de situaciones problemáticas distintas, presentadas al alumno en la actividad, capaces de generar ideas válidas para la resolución de problemas matemáticos.

Los siguientes metamodelos procedimentales para el aprendizaje de la resolución de problemas han surgido de la clasificación rigurosa y atenta de los

procedimientos mentales desarrollados por nuestros alumnos al llevar a cabo el acto de pensar. A este conocimiento se ha llegado en el tiempo mediante el ciclo científico: observación-experimentación-observación.

Saber pensar es necesario, pero no es suficiente. Saber pensar y saber trabajar esclarecen más el sentido de los metamodelos que se exponen a continuación: generativos, de estructuración, de enlaces, de transformación, de composición y de interconexión. De estos seis metamodelos surgen 49 modelos de situaciones problemáticas.

Metamodelos generativos

Tendrían que ser las primeras situaciones a las que se enfrentase el alumno, si bien no deberían ocupar siempre estos primeros lugares. Estos metamodelos:

- Desarrollan la confianza y la seguridad de los alumnos en sí mismos.
- Ayudan a generar ideas y a utilizar el razonamiento lógico.
- La operación queda subordinada al pensamiento, del que se desprende divergencia y flexibilidad.
- Ayudan a percibir la estrategia como vía de solución y a buscar, a posteriori, la operación válida para dar cuerpo al proceso de resolución.
- En las situaciones que se presentan el número es algo secundario.
- Permiten retener el desafío central a partir del cual se reflexiona.
- Se percibe la importancia de la no arbitrariedad en los problemas.
- Se desarrolla –con respecto a las ideas de los demás– la atención, la actitud crítica, la capacidad de tolerancia, la colaboración y la solidaridad.

1 Resolver situaciones sin número

Se presenta un problema en el que no aparecen datos numéricos ni en el enunciado ni en las preguntas. Para llegar a la solución, no es necesario realizar operación alguna.

Se dejan caer una pelota que está encima de un armario y otra que se encuentra sobre una silla. ¿Qué pelota llegará antes al suelo? ¿Se han dejado caer las dos pelotas a la vez? ¿Dónde has supuesto que está la silla? ¿Es el armario más alto que la silla? ¿Podría estar la silla en una posición más alta que el armario?



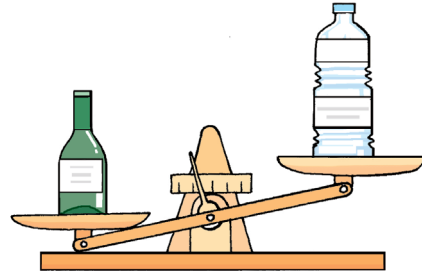
2 Trabajar con informaciones que permiten hacer deducciones

Se proporcionan informaciones sin pregunta alguna: puede tratarse de una frase, de la portada de un libro, de un cartel publicitario, una lista de precios... La realización de la actividad consiste en deducir ideas y clasificarlas en lógicas –aquellas que son verdad o mentira para todos– y no lógicas, así como en posibles –tanto muy posibles como poco posibles– e imposibles.

La altura de una botella de vino es menor que la altura de una botella de agua.



La botella de vino vacía pesa más que la botella de agua en las mismas condiciones.



3 Plantear situaciones cualitativas

Se presenta una actividad que contiene un enunciado y una pregunta con sentido lógico, pero de forma incompleta para llegar a la solución. Se dará al alumno toda la información que necesite para resolver la actividad, según la vaya solicitando.

El lunes empecé un libro y leí las 30 primeras páginas. El martes lo acabé. ¿Qué día leí más páginas de ese libro?



4 Incorporar enunciados abiertos

Se le da al alumno cierta información a partir de una frase, una foto, un dibujo, un esquema, un titular de periódico, un prospecto, una programación de televisión... Su labor consiste en inventar una situación problemática en la que utilice esa idea.

Inventa un problema y resuélvelo a partir de lo que te sugiera una de estas frases:

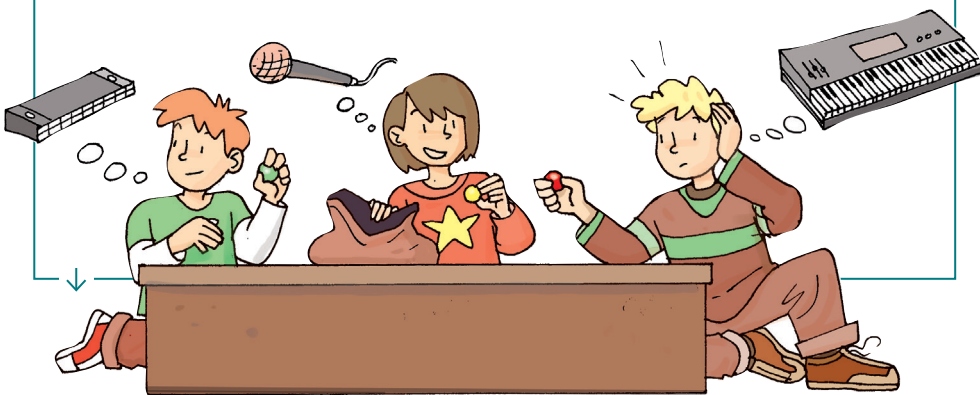
- Muchos accidentes de tráfico son por culpa del alcohol.
- Una buena alimentación ayuda a no coger mucho peso.

5 Presentar problemas de lógica

En ellos no interviene el algoritmo. Se utiliza el razonamiento por deducción, inducción y analogía.

Ayer fue viernes, dije ayer. ¿Qué día será mañana?

En una bolsa opaca hay tres bolas: una de color verde, otra de color rojo y otra de color amarillo. Tres niños, A, B y C, sacan cada uno una bola. El niño que saque la bola amarilla cantará una canción, el que saque la bola roja tocará el órgano y el que saque la verde acompañará el espectáculo tocando la armónica.





Los tres niños han cogido una bola que solo ellos han visto. Cuando se les pregunta por la bola que han sacado, el niño A responde que ha sacado la bola verde, el niño B dice que no ha sacado la amarilla, y el niño C dice que no ha sacado la roja. Sabiendo que uno solo de los niños miente, averigua quién canta, quién toca el órgano y quién la armónica. Ayuda: el niño A no toca el órgano.

Metamodelos de estructuración

Estos metamodelos:

- ▶ Ayudan a estructurar mentalmente las partes que componen el problema: enunciado, pregunta, proceso de resolución, solución.
- ▶ Se percibe la importancia de cada una de las partes que constituyen el problema, así como la relación que tienen y la no arbitrariedad entre ellas.
- ▶ Al implicar al alumno en la construcción del problema, este interpreta mentalmente la situación problemática, utilizando las operaciones matemáticas como instrumentos para la resolución de las estrategias elegidas; asimismo, distingue la solución del problema del proceso de resolución de este y es capaz de estimar con razonamiento lógico la validez del resultado debido a que ha utilizado la reversibilidad de los procesos operativos como técnica de verificación.
- ▶ Se es consciente de que un mismo resultado puede corresponder a diferentes situaciones planteadas: donde un alumno suma, otro resta.
- ▶ Se adquiere igualmente conciencia de que una misma operación o conjunto de operaciones da lugar a la creación de una amplia diversidad de situaciones.
- ▶ Surgen interesantes razones para respetar las ideas de los demás.

6 Inventar y resolver un problema a partir de una solución dada

El alumno creará el enunciado, la pregunta y el proceso que se adecúe a la solución de partida.

Inventa un problema cuya solución sea 16 páginas.



7 Inventar y resolver un problema a partir de una expresión matemática

El alumno elaborará un enunciado y una pregunta que se corresponda con el contenido de relación aplicativa de la expresión de partida.

Inventa un problema que se resuelva mediante la siguiente expresión matemática: $(16 + 7 - 4) \times 5$

7 Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones

El alumno ideará un enunciado y llegará a la solución dada, aplicando la operación u operaciones indicadas

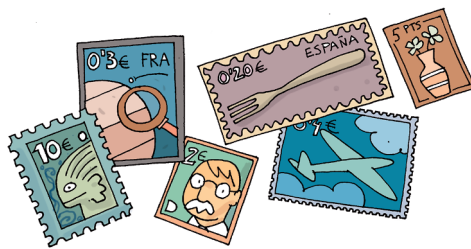
Inventa y resuelve un problema con dos operaciones (suma y resta), cuya solución sea 796. Uno de los datos numéricos del enunciado no debe utilizarse en la resolución del problema (dato no significativo).



9 Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones

Se trata de llegar a la solución que se indica utilizando (todos/no todos) los datos numéricos que se dan.

Dispones de los siguientes datos: 315, 201, 192, 798, 405. Con algunos de ellos inventa un problema cuya solución sea 597 sellos.



Metamodelos de enlaces

Estos metamodelos:

- ▶ Ayudan a encontrar la concordancia lógica entre enunciado, pregunta y solución.
- ▶ Se trabaja con variables de relación entre las siguientes partes: variables sintácticas, lógicas, matemáticas, creencias sociales, experiencias propias.
- ▶ Desarrollan la atención y la prudencia en el trabajo.
- ▶ Evitan la dependencia de la asociación de formas lingüísticas con la aplicación de operaciones.
- ▶ En la utilización de los datos no interviene el azar, pues el significado de aquellos se percibe en el marco de la situación problemática.
- ▶ En este tipo de situaciones, ni todos los problemas presentan datos numéricos y ni todos los datos de un problema son numéricos.

10 Expresar preguntas y responderlas a partir de un enunciado dado

La labor del alumno consiste en crear preguntas que se puedan contestar teniendo en cuenta, **únicamente**, el enunciado de partida.

Escribe preguntas que se puedan responder a partir del siguiente enunciado:

Sonia ha estado viendo la televisión 137 minutos. Ramón ha estado viendo la televisión 29 minutos menos que Sonia.

11 Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la operación

Se parte de un enunciado seguido de preguntas en blanco. En cada una de las preguntas se indica la operación que se tiene que utilizar para llegar a las respuestas.

Escribe preguntas a partir del siguiente enunciado, fijándote en la operación que tienes que utilizar para responderlas:

Joaquín tiene dos cuadernos de Plástica. El cuaderno número 1 es para pintar y le ha costado 147 céntimos de euro, mientras que el número 2 es para recortar y le ha costado 394 céntimos de euro.

¿_____? Operación: suma

¿_____? Operación: multiplicación

¿_____? Operación: resta

12 Formular las preguntas que se corresponden con el enunciado y la expresión matemática

Se plantea un enunciado y una serie de preguntas en blanco. Cada una de las preguntas va acompañada por la expresión matemática que se debe utilizar en el proceso de resolución.

El señor A gana en cuatro meses 536 000 céntimos de euro. El señor B gana en un año 1 176 000 céntimos de euro. El señor C gana en 24 meses 4 800 000 céntimos de euro. Sabiendo que las mensualidades de cada uno son siempre iguales, escribid la pregunta correspondiente:

¿_____? $(536\,000 : 4)$

¿_____? $(1\,176\,000 : 4)$

¿_____? $(1\,176\,000 : 12) \times 5$

¿_____? $(4\,800\,000 : 24) \times 12$

¿_____? $(536\,000 \times 3)$

¿_____? $(536\,000 : 4) + 536\,000$

¿_____? $(4\,800\,000 : 2)$

¿_____? $(11\,760 : 365)$

13 Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la solución

Se presenta de nuevo un enunciado con preguntas en blanco. Cada pregunta incluye esta vez una solución determinada.

Escribe la pregunta según corresponda:

La catedral de Sevilla se comenzó a construir en el año 1402 y se terminó en el año 1519. Su planta es rectangular.

↓ _____



La catedral de Santiago de Compostela, en Galicia, se construyó entre el año 1075 y el año 1128.

¿_____? Sol.: 274 años ¿_____? Sol.: 4 692 meses

¿_____? Sol.: No ¿_____? Sol.: La catedral de Santiago

¿_____? Sol.: No se puede saber con los datos de que se dispone.

14 Inventar un enunciado relativo a una pregunta dada y resolver el problema utilizando todos los datos del enunciado o solo algunos

El alumno debe inventar el enunciado de un problema y resolverlo.

Escribe un enunciado para la siguiente pregunta y resuelve el problema:

¿Cuántos libros he metido en cada caja sabiendo que cada una contiene un ejemplar más que en la anterior?



15 Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta y una solución determinadas

El alumno ha de resolver un problema utilizando unas veces todos los datos del enunciado y otras solo algunos.

Escribe un enunciado relacionado con la siguiente pregunta y su solución:

¿Cuántas páginas le quedan a Susana por leer? Sol.: 32

- 16 Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada, así como con la operación u operaciones que hay que seguir en el proceso de resolución, y resolver el problema**

Idear un enunciado para cada una de las preguntas que se plantean y resolver los problemas con la operación que se indica en cada caso:

Crea un enunciado para cada una de las preguntas y resuelve los problemas con la operación que se indica en cada caso:

¿Cuántas gallinas hay dentro del corral? Operación: suma

¿Cuántas gallinas hay dentro del corral? Operación: resta

- 17 Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta determinada y el proceso de resolución dado**

Se presenta la pregunta y el proceso de resolución de un problema.

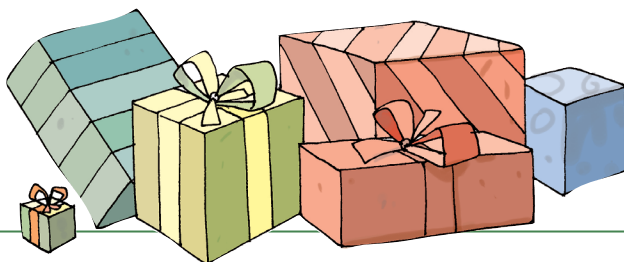
Escribe un enunciado utilizando solo tres datos numéricos. ¿Cuánto costó cada regalo?

$$570 - 80 = 490$$

$$570 + 490 = 1\,060$$

$$1\,060 - 300 = 760$$

Solución: _____ euros; _____ euros; _____ euros



18 Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada, con cierta solución del problema y con determinados datos numéricos que deben figurar en el enunciado

El alumno tiene que resolver el problema utilizando todos los datos del enunciado o solo con algunos.

Selecciona los datos numéricos que se indican para construir el enunciado de los tres problemas siguientes. Datos: 9, 12, 6, 4, 8, 10, 7

¿Cuántas estrellitas se hicieron para adornar la clase? Sol.: 48 estrellitas

¿Cuántos dibujos se pusieron en la pared del pasillo entre las tres clases? Sol.: 25 dibujos

¿Cuántas excursiones hicieron los niños de tercero más que los niños de segundo? Sol.: 3 excursiones más

19 Inventar un enunciado que se corresponda con varias preguntas

La labor del alumno consiste en crear un **único** enunciado capaz de dar respuesta a todas y cada una de las preguntas presentadas.

Inventa un único enunciado que te permita responder a estas dos preguntas:

¿Cuántos minutos esperó Luis más que Arturo?

¿Cuántos minutos esperó Arturo menos que Sara?

20 Inventar un enunciado, y solo uno, con el que se pueda responder, únicamente mediante las operaciones indicadas, a todas y cada una de las preguntas dadas

Se presentan varias preguntas acompañadas de la indicación de la operación u operaciones que se tienen que realizar para llegar a su respuesta.

Inventa un solo enunciado que te permita resolver las dos preguntas siguientes, atendiendo a las condiciones que se indican:

¿Cuántos pasteles había en las 7 bandejas? Operación: multiplicación

¿Cuántos pasteles quedaron? Operación: suma

20 Inventar un único enunciado que se corresponda con varias preguntas dadas y con las soluciones que acompañan a todas y cada una de ellas

El alumno debe inventarse un enunciado y comprobar el resultado del problema.

Inventa un único enunciado acorde con estas preguntas y sus soluciones:

¿Cuántos litros de vino hay en los tres barriles? Sol.: 290 litros

¿Cuántos litros más de vino hay en el barril A que en el barril C? Sol.: 10 litros

¿Cuántos litros de vino hay en dos de esos barriles? Sol.: 200 litros

20 Inventar un único enunciado en el que aparezcan los datos numéricos dados

El alumno utilizará en el proceso unas veces todos los datos y otras solo algunos, datos que han de corresponderse en ambos casos con varias preguntas dadas y con las soluciones que acompañan a cada una de ellas.

Elige algunos datos de entre los siguientes para construir un solo enunciado que se corresponda con las preguntas y soluciones dadas:

1 050, 3, 9, 12, 150.

¿Cuánto dinero ha puesto cada amigo? Sol.: 350 céntimos de euro

¿Cuántas tortillas se han comprado? Sol.: 3

Metamodelos de transformación

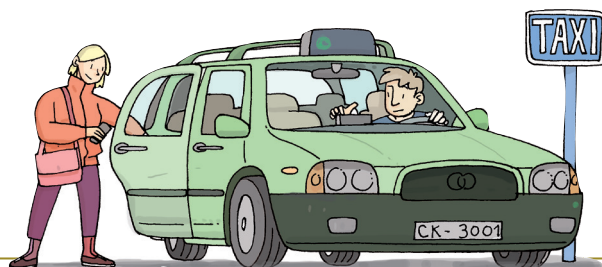
Estos metamodelos:

- ▶ Utilizan una diversidad de enfoques y una pluralidad de alternativas.
- ▶ Presentan un dinamismo de relaciones mentales que implican el desarrollo de un pensamiento matemático.
- ▶ Consolidan conceptos.
- ▶ Hacen hincapié en los elementos que representan las magnitudes que intervienen en las situaciones.
- ▶ Emplean el método de análisis y el método de síntesis.
- ▶ Ayudan a la autocorrección y a establecer relaciones de semejanza y diferencia entre las estrategias de resolución de situaciones problemáticas.

- 23** Cambiar los datos necesarios del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener una solución dada y distinta a la que se obtuvo anteriormente

Atender a las condiciones que se expresan en la descripción del modelo.

Sara sale de su casa con 2 000 céntimos de euro. Gasta 600 céntimos de euro en el cine y 580 céntimos de euro en un taxi para volver a casa. Antes de coger el taxi, estuvo de tiendas. Volvió a casa con 240 céntimos de euro. ¿Crees que compró algo en aquellas tiendas? ¿Qué cambiarías del enunciado para que la respuesta a la pregunta anterior fuese: «No»?



- 24** Cambiar los datos del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener la misma solución que se obtuvo anteriormente

Hay que partir de un problema fácil y cuya resolución esté al alcance de todos los alumnos. Se van cambiando los datos por otros más complejos, pero equivalentes, de modo que la solución del problema no varíe.

María tiene 1 500 céntimos de euro. Su papá le da 380 céntimos de euro. Ahora María tiene mucho dinero y decide gastarse 590 céntimos de euro en pegatinas. ¿Cuántos céntimos de euro le quedan a María después de gastarse ese dinero en pegatinas?





Cambia dos datos numéricos del enunciado sin que varíe la solución del problema.

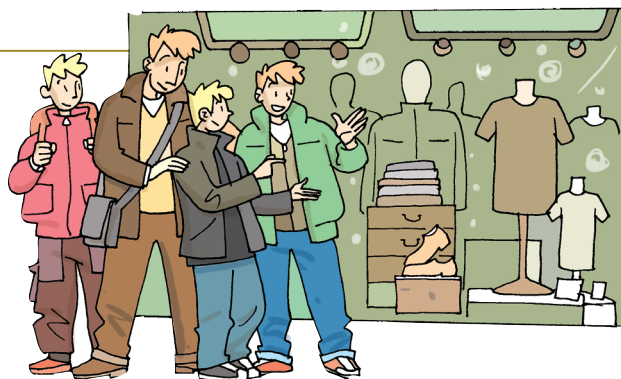
Cambia todos los datos numéricos del enunciado sin que varíe la solución del problema.

¿Podrías cambiar un solo dato del enunciado sin que varíe la solución del problema?

25 Añadir o eliminar información de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la solución no varíe

Se trata de resolver un problema y, a continuación, redactarlo dejando solo la información imprescindible para llegar a la solución sin que varíe.

Raúl, que es dueño de una tienda, tiene actualmente 57 años y es padre de tres hijos de edades consecutivas. La suma de las edades de sus hijos es de 78 años. El primero de ellos nació cuando Raúl tenía 20 años; el segundo, cuando tenía 21 años, y el tercero, cuando tenía 22 años. ¿Qué edad tienen en la actualidad los hijos?



26 Cambiar los tiempos verbales en los que se expresa un problema que ya ha sido resuelto

Hay que resolver el nuevo problema y observar y comparar las soluciones de ambos.

Tengo 5 euros y me gasto 3 de esos euros. ¿Cuánto me queda? Sol.: 2 euros

Tengo 5 euros y me gastaré 3 de esos euros. ¿Cuánto me quedará? Sol.: 2 euros

27 Cambiar únicamente lo que sea necesario de un problema para que su proceso de resolución, que se presenta, sea correcto

Atender a las condiciones que se expresan en la descripción del modelo.

El cubo rosa tiene una masa de 8 kg; el cubo azul, de 12 kg, y el cubo verde, de 15 kg. ¿Cuántos kilogramos de masa tienen los tres cubos juntos? Sol.: 8 litros + 12 litros + 15 litros = 35 litros caben en los tres cubos llenos.

28 Averiguar el dato falso de un problema, cuya solución, sin embargo, es correcta

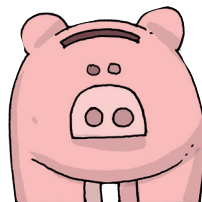
En este caso existe un único dato que no permite llegar a la solución indicada.

Averigua el dato falso del enunciado, sabiendo que solo hay uno, y que la solución del problema es la correcta.





En una hucha hay el mismo número de monedas de cada clase: 12 monedas de 20 céntimos de euro, 12 de 1 céntimo de euro y otras 12 de 10 céntimos de euro. ¿Cuánto dinero hay en esa hucha?
Sol.: 480 céntimos de euro



29 Cambiar la pregunta de un problema para que la nueva solución sea la misma que la que se obtuvo anteriormente

Atender a las condiciones que se expresan en la descripción del modelo.

Un niño tiene en su hucha tres monedas de 20 céntimos de euro, diez monedas de 5 céntimos de euro y tres monedas de 100 céntimos de euro. ¿Cuántas clases distintas de monedas tiene en su hucha?

30 Cambiar el orden en el que aparecen las proposiciones del enunciado de un problema que ya ha sido resuelto

El alumno debe resolver el nuevo problema. A continuación, observará y comparará ambas soluciones.

Celia tiene 3 sobres de cromos. En cada sobre siempre vienen 5 cromos. Celia se compra 2 sobres de cromos. ¿Cuántos cromos tiene ahora?





Celia se compra 2 sobres de cromos. Celia tiene 3 sobres de cromos. En cada sobre siempre vienen 5 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Celia ahora?

31 Cambiar la expresión afirmativa o negativa de las proposiciones de un enunciado

En este caso, se plantea un problema en cuyo enunciado intervienen dos, y solo dos, proposiciones. Una vez resuelto, se niega la primera proposición, y solo esa. Se crea un nuevo problema, que se resuelve. A continuación, se niega la segunda proposición, y solo esa. Se crea un nuevo problema, que se resuelve. Finalmente, el alumno tendrá que negar las dos proposiciones y resolver el problema resultante. Observará las dificultades de precisar la solución y comparará las cuatro soluciones.

Juan se gastó más dinero que Luis. Luis se gastó más dinero que Javier. ¿Quién de los tres se gastó más dinero?

32 Cambiar la conjunción por disyunción, y viceversa

El alumno resolverá el nuevo problema y luego observará y comparará las soluciones.

Ricardo tiene pensado comprar 1 kg de lentejas a 560 céntimos de euro/kilogramo y 2 kg de judías pintas a 870 céntimos de euro/kilogramo o 3 kg de judías blancas a 720 céntimos de euro/kilogramo. ¿Cuánto dinero pagará por esa compra?

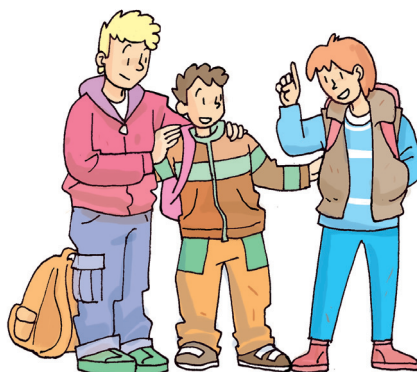
33 Negar las proposiciones del enunciado de un problema y cambiar la pregunta para que la solución no varíe

Los pasos son los mismos que se han seguido en el modelo 31; la diferencia consiste en que el alumno, una vez realizadas las negaciones, ha de crear para todos y cada uno de los nuevos problemas una pregunta cuya solución sea la misma.

Juan es más alto que Marta.
Marta es más alta que Arturo.
¿Quién es más bajo? Sol.: Arturo

Juan no es más alto que Marta.
Marta no es más alta que Arturo.

¿Quién es más alto? Sol.: Arturo



34 Buscar la correspondencia entre enunciados, preguntas y soluciones

Se dan varios enunciados, varias preguntas y varias soluciones u operaciones desordenadas, que se corresponden entre sí. El alumno debe buscar la correspondencia entre enunciados, preguntas y soluciones.

Algunas de las expresiones matemáticas que se indican a continuación sirven para resolver las situaciones problemáticas enunciadas a continuación; averigua cuáles son:

$$762 \times 6$$

$$762 - 6$$

$$762 + 6$$

$$762 \times 9$$

$$762 - 9$$

$$762 + 9$$

$$1\,503 \times 4$$

$$34 + 9$$





- En una biblioteca hay 6 salas de lectura. Cada una de esas salas alberga 762 libros. Hoy solo está abierta una sala de lectura. En este momento hay 9 personas leyendo. ¿Entre cuántos libros podrías elegir si fueras a leer en este momento a la biblioteca?
- En una biblioteca que hoy ha abierto a las 9 de la mañana, hay 6 salas de lectura. Cada una de esas salas cuenta con 762 libros. ¿Cuántos libros había en la biblioteca a las 9 de la mañana de hoy?
- En una biblioteca hay 6 salas de lectura. En una de ellas se han prestado únicamente 6 libros, de modo que, en dicha sala, han quedado 762 libros disponibles. ¿Cuántos libros había en la sala antes de realizar ningún préstamo?

35 Mezclar las preguntas de dos problemas

Se presentan los enunciados de dos problemas distintos. Las preguntas que corresponden a cada uno de los enunciados se han mezclado, generando un sinsentido de palabras. La realización de la actividad consiste en resolver los dos problemas.

Se han mezclado las preguntas de los dos problemas siguientes. Descífralas y resuelve los problemas.

- Para ir de excursión, 115 niños contratan dos autobuses. En uno de esos autobuses viajan 57 niños.
- En la biblioteca hay 369 libros de cuentos y 235 libros de poesía. ¿Cuántos en la biblioteca viajan hay ¿en los otro cuentos? niños Cuántos libros de autobús y de poesía

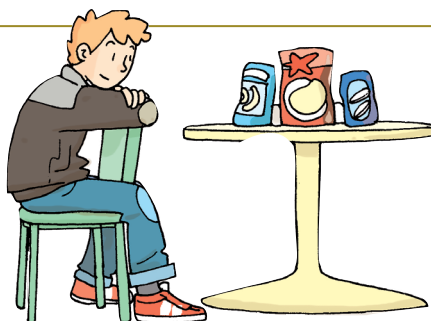
36 Cambiar los datos de uno o varios problemas, dentro del mismo problema o entre ellos

Se advierte al alumno de que todos o algunos de los datos que aparecen en los enunciados se han cambiado y no ocupan el lugar que les corresponde. Su labor consiste en dar respuesta a la pregunta del problema o problemas.

Ningún dato numérico del siguiente problema está donde le corresponde. Resuelve el problema.

Mario tiene 120 céntimos de euro. Una bolsa de gusanitos cuesta 80 céntimos de euro.

Una bolsa de patatas cuesta 200 céntimos de euro. Una bolsa de pipas cuesta 75 céntimos de euro. Mario se ha comprado la bolsa de pipas, que era lo más caro, y otra cosa. Le ha sobrado dinero. ¿Qué se ha comprado Mario?



37 Mezclar el enunciado o enunciados de uno o varios problemas

Se presenta, bien un problema cuyo enunciado carece de sentido por haberse desordenado, o bien dos enunciados mezclados. Se proporciona al alumno la información necesaria para que pueda ordenar el enunciado o los enunciados sin ambigüedad alguna y hallar la solución o soluciones.

Se han mezclado dos enunciados. Sabiendo que los dos problemas tienen la misma solución, escribid los enunciados para que se correspondan con sus respectivas preguntas.





Ayer de lectura 682 céntimos de euro más que Julio. Cada 87 céntimos de euro Javier tiene 32. Pagué bolígrafo con cuatro libros. Julio un libro y compré. 6 me costó cada billete de 25 céntimos de euro monedas de 5 000 monedas de 5 céntimos de euro y 30 bolígrafos tiene céntimos de euro. ¿Cuánto dinero me devolvieron? ¿Cuántos céntimos de euro tienen entre los dos?

38 Mezclar los procesos de resolución de dos problemas

Se proponen dos problemas distintos. Se mezclan los procesos de resolución. La labor del alumno consiste en relacionar cada proceso con el problema correspondiente.

Completa el enunciado según corresponda. A continuación se escriben, sin respetar su orden, las operaciones que permiten resolver correctamente estos dos problemas. Todas y cada una de estas operaciones son necesarias.

$$16 + 1 = 17 \quad 3 \times 2 = 6 \quad 8 \times 4 = 32 \quad 15 : 5 = 3 \quad 32 : 2 = 16$$

$$32 - 17 = 15 \quad 2\,000 - 1\,992 = 8 \quad 12 - 7 = 5 \quad 32 \times 2 = 64$$

Problema 1

En un pueblo hay 16 matrimonios recién casados, un matrimonio que lleva 56 años casado y otros matrimonios. En este pueblo nacen _____ niños al trimestre y solo dos. Si esta información corresponde al día 1 de enero de _____, ¿cuántos niños habrán nacido hasta el 1 de enero del año _____?





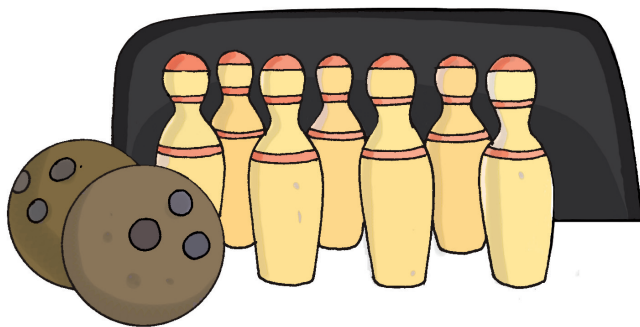
Problema 2

En un pueblo tienen _____ fiestas al año. Los primeros _____ meses celebran _____ fiestas más una y en cada uno de los meses restantes tienen lugar _____ fiestas. ¿Cuántas fiestas hay en agosto y septiembre?

39 Cambiar las preguntas de un problema por una sola

El punto de partida es un problema con varias preguntas. La labor del alumno consiste en buscar una sola en cuyo proceso de resolución se contesten todas las demás.

Juan obtuvo 100 puntos; Pedro, 80 puntos, y Marta, 200 puntos. ¿Cuántos puntos consiguió Juan más que Pedro? ¿Cuántos puntos obtuvo María más que Pedro?



Metamodelos de composición

Esto metamodelos:

- ▶ Ayudan a ver el problema como un todo.
- ▶ Propician la emisión de juicios a partir de relaciones múltiples.
- ▶ Desarrollan la memoria, la observación y la capacidad de demostración, así como la de seguir un proceso en sentido contrario y el pensamiento reversible.
- ▶ Permiten la autocorrección.
- ▶ Fomentan la necesidad de leer el enunciado las veces que sea preciso.
- ▶ Potencian el uso del método analítico, sintético y analítico-sintético.

40 **Componer el enunciado o enunciados de uno o varios problemas a partir de todos o algunos de los datos que se ofrecen y resolver finalmente la situación problemática**

Se proponen enunciados cuya información es incompleta para dar respuesta a la pregunta que plantean. Se incluyen también una serie de datos fuera del contexto del problema. La realización de la actividad consiste en elegir el lugar correcto que ocupan los datos para que pueda resolverse el problema.

Se necesita un detective numérico. A los dos problemas siguientes se les han borrado los datos. Se sabe cuáles son, pero no dónde estaban. Juega tú a ser detective y coloca los datos en el lugar correspondiente. Datos: 3 / 21 / 18 / 6 / 8 / 108 / 48





1. En _____ muebles exactamente iguales hay un total de _____ estanterías. ¿Cuántas estanterías hay en _____ de esos muebles?

Sol.: un dato del problema 1

2. Un panadero forma dos filas de cestas de pan, poniendo en la primera fila menos cestas que en la segunda. Así, en la primera fila pone _____ cestas con _____ barras de pan en cada una, mientras que en la segunda fila pone _____ cestas con _____ barras de pan en cada una. ¿Cuántas filas de pan hay en la primera fila de cestas más que en la segunda? Sol.: un dato del problema 2

41 Completar los datos del enunciado de un problema a partir del proceso de resolución

El punto de partida es ahora un problema resuelto cuyos datos se han borrado del enunciado; en su lugar se ha dejado el espacio correspondiente para que el alumno lo complete según corresponda.

Escribe los datos que faltan en el enunciado para que el problema esté bien resuelto:

Sofía se compra _____ sobres de cromos. En cada sobre tienen que venir _____ cromos; sin embargo, por un error de fábrica, a Sofía le han dado _____ sobres vacíos. ¿Cuántos cromos tiene Sofía?

$$17 - 3 = 14$$

$$14 \times 7 = 98$$

Sofía tiene 98 cromos.

42 Completar los datos del enunciado de un problema a partir de la solución de este

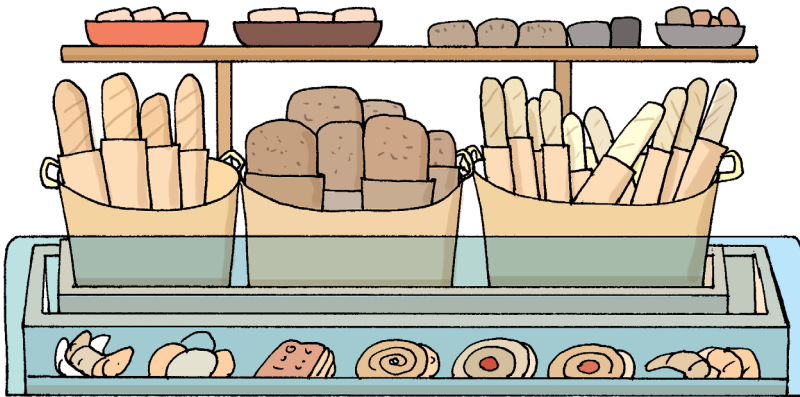
Se propone un problema y se da su solución. Se eliminan los datos del enunciado y se dejan en su lugar los espacios en blanco. El alumno ha de completar el enunciado según corresponda.

Completa los datos que faltan en el enunciado, de modo que las respuestas sean correctas.

A una panadería llegan 87 barras de pan sin sal y _____ barras de pan con sal. El establecimiento vende 182 barras de pan con sal y _____ barras de pan sin sal.

¿Cuántas barras ha vendido en total la panadería? Sol.: 251 barras

¿Cuántas barras llevaron a la panadería? Sol.: 282 barras



Metamodelos de interconexión

Estos metamodelos:

- ▶ Potencian la mente al aplicar los conceptos y plantear las operaciones.
- ▶ Desarrollan la originalidad, la imaginación y la creatividad.
- ▶ Aportan componentes de interdisciplinariedad y transversalidad.
- ▶ Ayudan a reflexionar sobre la lógica que ha operado en el razonamiento del proceso de resolución de un problema y a distinguir entre lo necesario y lo suficiente.

43 Inventar un problema con un vocabulario específico dado y resolverlo

En este tipo de problemas se proporciona al alumno el vocabulario que debe utilizar en la redacción del enunciado y de las preguntas.

Inventa y resuelve un problema en cuyo enunciado incluyas los siguientes términos: «doble», «radiador» y «abril»; asimismo en la pregunta deben figurar estas palabras: «mes», «día» y «agua».

44 Inventar un problema con un vocabulario específico, así como la operación u operaciones que deben utilizarse para su resolución

Atender a las condiciones que se expresan en la descripción del modelo.

Inventa un problema cuya pregunta incluya los siguientes términos: «mes», «día» y «agua», y resuélvelo mediante una multiplicación y una suma.

45 Inventar un problema con un vocabulario específico y con una solución dada

Atender a las condiciones que se expresan en la descripción del modelo.

Inventa y resuelve un problema en cuyo enunciado incluyas los términos «tecnología», «manufacturados», «bienestar», y en la pregunta figuren las palabras «obreros» y «exportación». Sol.: 1 500 euros

46 Resolver problemas que se presentan de forma completa, y cuya resolución favorezca la aplicación de los conceptos, operaciones y relaciones lógicas a las necesidades habituales de desarrollo personal, convivencia e interacción con el entorno; pueden ser problemas con solución única, sin solución definida o con varias soluciones

Atender a las condiciones que se expresan en la descripción del modelo.

Un matrimonio va al mercado. Este matrimonio, que tiene 4 hijos, consume ahora exactamente 12 kg de naranjas por semana, ni un gramo más ni un gramo menos.

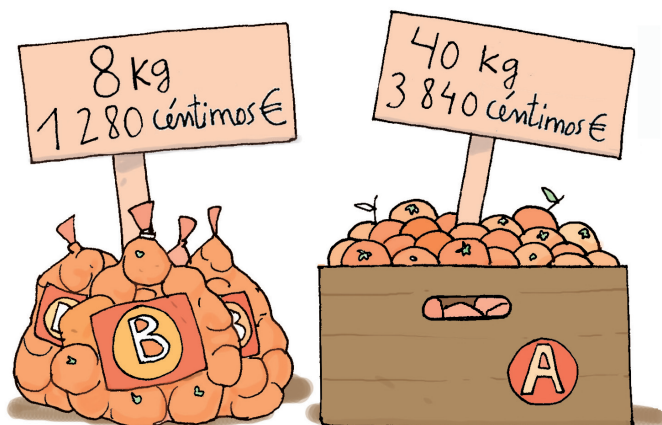
Hoy hay una oferta de naranjas de la clase A: una caja de 40 kg vale 3 840 céntimos de euro. La oferta les parece interesante cuando la comparan con el precio de las naranjas de la clase B: una bolsa de 8 kg sale a 1 280 céntimos de euro.

Se sabe que las naranjas de clase B son mejores que las de clase A y que las naranjas de cualquier clase duran exactamente 2 semanas.





El matrimonio está indeciso: quiere que pase la mayor cantidad de tiempo posible antes de tener que volver a comprar naranjas y, al mismo tiempo, desea ahorrar en la compra el máximo de dinero posible. Podrías aconsejarles: ¿qué naranjas debería comprar el matrimonio: de clase A o de clase B?



47 Seleccionar la información necesaria mediante la consulta de documentación

Se trata de plantear una pregunta cuya contestación requiera la consulta de diccionarios, textos, enciclopedias... o, simplemente, salir al patio, husmear en los listados de alumnos del colegio... con objeto de recabar la información necesaria. Como nuestros alumnos pertenecen a Educación Primaria, es imprescindible facilitar el éxito de la búsqueda, en la que muchos de ellos perderían el tiempo sin rentabilizar el esfuerzo. A tal fin, el docente elaborará y pondrá a disposición de los pequeños una serie de fichas –adaptadas a su edad, en número y contenido– con objeto de que seleccionen y extraigan de ellas los datos necesarios para resolver el problema.

Se divide a los alumnos en pequeños grupos. Al final de la clase, y sobre unas mesas alejadas de los alumnos, se dejan las fichas que contienen la información. El profesor, y solo él, dispone de un conjunto de preguntas que se pueden responder a partir de esas fichas. El profesor escribe en la pizarra una cualquiera de las preguntas.

El juego consiste en averiguar la respuesta y demostrar a los compañeros que la respuesta es la correcta.

Regla 1.^a: solo una persona de cada grupo puede salir a leer las fichas cuando así lo indique el profesor.

Regla 2.^a: cuando el profesor dé una palmada, se acaba el tiempo de lectura (se recomienda dejar aproximadamente un minuto o algo menos) y los alumnos que están leyendo esas fichas deben sentarse de inmediato con su grupo, pues, en caso contrario, el grupo entero quedaría eliminado.

Regla 3.^a: no se puede salir a leer las fichas con papel y bolígrafo; sin embargo, sí está permitido el uso de papel y bolígrafo por parte del resto del grupo.

Regla 4.^a: el niño o niña de cada grupo que haya salido a leer las fichas y recabar información no podrá volver a hacerlo hasta que no haya leído el resto de miembros del grupo.

El profesor dejará un tiempo de diálogo entre los miembros del grupo para facilitar el intercambio de información antes de dar la siguiente orden de salida.



Cuando un grupo sepa la respuesta, la escribirá en la pizarra y será su responsabilidad demostrar al resto de la clase que la respuesta es correcta. Para ello, podrán disponer ya de toda la información recogida en las distintas fichas.

Ejemplo: el profesor escribe en la pizarra la siguiente pregunta: «¿Cuántos años transcurrieron desde que se encontró al peluquero más barato hasta que se formó la banda de música con mayor número de miembros?». A continuación, deja a disposición del alumno y fuera del alcance de los grupos las siguientes fichas:

Información

Luis Paniego consiguió el récord al lograr colocar 1 029 ladrillos de 2 kg cada uno en 45 minutos.

Información

La banda musical con mayor número de miembros se formó el 30 de mayo de 1990. Estaba compuesta por 950 músicos.

Información

Melissa Sanders, de Estados Unidos, estuvo subida a un poste de 15 m de altura durante 512 días. El anterior récord lo había conseguido Mark Sutton, que estuvo 488 días.

Información

Michel Hoveine, de nacionalidad francesa, tocó el órgano durante 32 horas seguidas.

Información

El caracol más fuerte es de Vizcaya y se llama Hércules. Arrastró una piedra de 240 g una distancia de 42 cm en 10 minutos. El anterior récord lo tenía Chavalito, que consiguió arrastrar la piedra 38 cm.

Información

Ángel López tiene el récord de ser el peluquero más barato. En 1971, cobraba el corte de pelo a 60 céntimos, el afeitado a 25 céntimos y el corte de pelo a navaja a 125 céntimos.





Otras preguntas que se podrían plantear son:

¿Cuántos años transcurrieron desde que se encontró al peluquero más barato hasta que se formó la banda de música con mayor número de miembros?

Si los músicos se organizaron en grupos de 25 integrantes, ¿cuántos grupos formaban la banda de música con mayor número de miembros?

¿Qué diferencia existe, en centímetros, entre la distancia que consiguió arrastrar la piedra Chavalito y la altura a la que se subió Melissa Sanders?

Escribe la pregunta:

¿_____? Sol.: Luis Paniego

¿Cuánto dinero cobraría Ángel López en 1971 por 7 afeitados y 9 cortes de pelo a navaja?

Escribe la pregunta:

¿_____? Sol.: 576 horas

Si se divide el número de minutos que Michel Hoveine estuvo tocando el órgano sin parar entre el número que expresa la masa en gramos de la piedra que arrastró Hércules, se obtiene un número que coincide con la cifra de las unidades de un récord ya superado; ¿cómo se llamaba la persona que lo consiguió?

Escribe la pregunta

¿_____? Sol.: 2 058

48 Resolver un problema que se presenta de forma distinta a la habitual

Se trata de plantear el problema en un formato inusual: una poesía, un caligrama, un gráfico (tablas, diagramas...), un cuento breve...

¿En qué número está pensando el poeta?

Mi cabeza está pensando, / bajo el sol y con sombrero, / un número curioso. ¿Quién lo adivina el primero? / Si lo divido entre dos, / el resultado es par / y también menor que diez./ Juega conmigo a pensar, / que al dividirlo entre tres / dos menos me quedarán.

Observa los teléfonos de interés del pueblo de Pedro:

BOMBEROS: — — 9 1 2 3

POLICÍA LOCAL: 3 4 9 1 3 2

POLICÍA NACIONAL: 3 — 9 3 — —

CENTRO DE SALUD: 3 4 9 2 — —

POLIDEPORTIVO: — — — 2 1 —

AYUNTAMIENTO: 3 4 9 3 2 1

A Pedro se le olvidó sacar la agenda de un pantalón que metió en la lavadora y se han borrado algunos números.

Pero Pedro sabe que en su pueblo... los teléfonos de interés tienen las mismas cifras, que las tres primeras son siempre iguales y que no hay dos números de teléfono totalmente iguales.





De este modo, Pedro no tiene ningún problema en:

- Hablar con el alcalde, para lo que marcaría el número _____.
- Pedir hora para ir al médico, en este caso marcaría el número _____.
- Saber si a las seis está libre la pista para jugar un partido de tenis, para lo que marcaría el número _____.

¿Qué número debe marcar si quisiese hablar con la Policía Nacional?

¿Con qué número de teléfono se obtiene un resultado mayor al sumar sus cifras?

49 Resolver un problema que plantee una relación entre lógica y matemática

Atender a las condiciones que se expresan en la descripción del modelo.

¡Qué raras son estas calles!

En la calle A, no todos los números son pares.

En la calle B, algunos números son pares.

En la calle C, ningún número es par.

En la calle D, son pares todos los que son pares.

En la calle E, dos números suman 57.

En la calle F, si se suman sus números dos a dos, siempre da un número par.

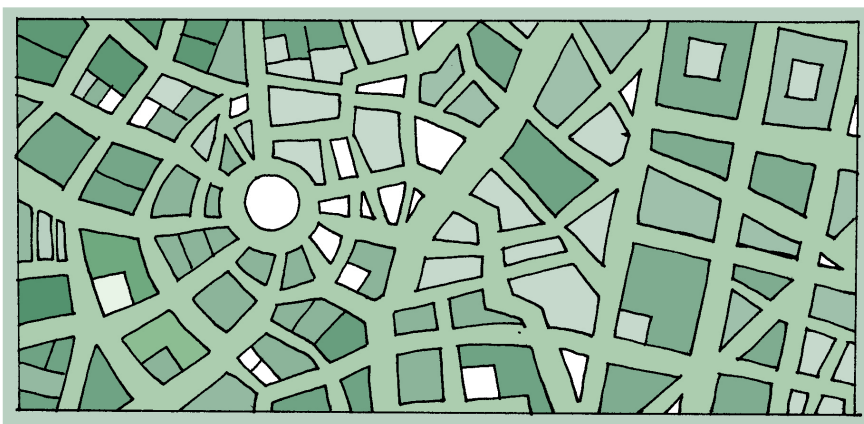




En la calle G, no hay ninguno de los números que hay en la calle C.

En la calle H, todos los números se pueden dividir de manera exacta tanto por dos como también por tres.

En una de estas calles, y solo en una, todos los números son pares, ¿cuál es esa calle?



BIBLIOGRAFÍA

- AIZPÚN, A. (1972): *Teoría y didáctica de la matemática actual*. Vol. I y II. Barcelona, Vicens Vives.
- ARISTÓTELES (1985): *Ética a Nicómaco* (Trad. María Araujo y Julián Marías). 4 ed. Madrid, Centro de Estudios Constitucionales (1994) (4).
- BELL, A. W.; COSTELLO, J. y KUCHEMANN D. (1983): *Research on Learning and Teaching*. Berkshire, NFER-Nelson-Windsord.
- BEREITER, C. (1985): «Toward a Solution of the Learning Paradox». *Review of Educational Research*, núm. 55.
- BOYER, C. (1987): *Historia de la matemática*. Madrid, Alianza.
- BROUSSEAU, G. (1988): *Fundamentos de didáctica de la matemática*. Zaragoza, Universidad de Zaragoza.
- BRUNER, J. S. (1966): *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge, Harvard University Press.
- BRUNER, J. S. (1986): *El habla del niño*. Barcelona, Paidós.
- CAMPEDELLI, L. (1970): *Fantasia y lógica en la matemática*. Barcelona, Labor.
- COCKCROFT, W. H. (1985): *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid, MEC.
- COHEN, J. (1977): *Introducción a la psicología*. Barcelona, Labor.
- DAVIDOV, V. (1988a): *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico*. Moscú, Progreso.
- DAVIDOV, V. y SHUARE, M. (comps.) (1988b): *La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS*. Moscú, Progreso.
- DAVIS, P. J. y HERSH, R. (1987): *Experiencia matemática*. Barcelona, MEC-Labor.
- DE BONO, E. (1968): *New Think. The Use of Lateral Thinking in the Generation of New Ideas*. Nueva York, Basic Books.
- DE GUZMÁN, M. (1984): *Cuentos con cuentas*. Barcelona, Labor.
- DE GUZMÁN, M. (1987): *Aventuras matemáticas*. Barcelona, Labor.
- DE GUZMÁN, M. (1991a): *Tendencias y experiencias innovadoras en educación matemática*. Ponencia presentada en IBERCIMA. Montevideo (julio de 1991).
- DE GUZMÁN, M. (1991b): *Para pensar mejor*. Barcelona, Labor.

- DE SÁNCHEZ, M. (1991): *Desarrollo de habilidades del pensamiento: creatividad*. México, Trillas.
- DRAY, J. (1957): *Laws and Explanation in History*. Oxford, Oxford University Press.
- ELLIOTT, J. (1994): *La investigación-acción en educación*. Madrid, Morata.
- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1995): «Las cuatro etapas del acto didáctico». *Comunidad Educativa*, núm. 228, pp. 36-40.
- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1996): «Relaciones psicosociales educativas en la resolución de problemas». *Revista Comunidad Educativa*, núm. 234.
- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1997): *El problema del «problema» o la ausencia de creatividad*. CPR Latina-Carabanchel, 11.
- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1998): «Investigación sobre los mecanismos de orientación lateral. El aprendizaje de los conceptos izquierda y derecha». *Suma*, núm. 27, pp. 57-63.
- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2000): *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos*. 2.^a ed. Barcelona, Wolters Kluwer.
- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2004): *El número de dos cifras: investigación didáctica e innovación educativa*. Madrid, Editorial CCS.
- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2005): *¡Qué verdad, qué mentira! La lógica en la enseñanza de la matemática* (obra de teatro y fundamentación científica). Madrid. Autoeditado por el autor.
- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2005): «Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas». *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, núm. 4, pp. 31-49.
- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2007): «Investigación didáctica sobre la técnica de contar como actividad matemática». *Suma*, núm. 55, pp. 21-30.
- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2007): «La enseñanza de la multiplicación aritmética: una barrera epistemológica en la enseñanza de la matemática». *Revista Iberoamericana de Educación (RIE)*, núm. 43, pp. 119-153.
- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2007): *Cómo enseñar matemática en preescolar*. Puebla, México, Gil Editores SA de CV.

- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2007): *Números en color. Acción y reacción para la enseñanza-aprendizaje de la matemática* (Libro + CD). Madrid, Editorial CCS.
- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2010): *La numeración y las cuatro operaciones matemáticas*. Madrid, CCS.
- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2012): *Desarrollo del pensamiento lógico y matemático. El concepto de número y otros conceptos*. Madrid, Grupo Mayéutica Educación.
- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2013): *Didáctica de la matemática en la Educación Infantil* (5.^a ed.). Madrid, Grupo Mayéutica Educación.
- FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2014): *Enséñame a «contar» y a «no contar». Uso y abuso de la técnica de contar para el desarrollo del pensamiento numérico y matemático*. Madrid. Grupo Mayéutica Educación.
- FREY, G. (1972): *La matematización de nuestro universo* (Trad. José Barrio). Madrid, G. del Toro, Colección Molino de Ideas, 12.
- GAGNÉ, E. (1991): *La psicología cognitiva del aprendizaje escolar*. Madrid, Visor.
- GARDNER, M. (1994): *¡Ajá! Paradojas*. Barcelona, RBA.
- GÓMEZ ALONSO, B. (1991): *Las matemáticas y el proceso educativo. Área de conocimiento: Didáctica de las Matemáticas*. Colección Cultura y Aprendizaje. Madrid, Síntesis.
- GRUPO CERO (1987): *Un proyecto de currículum de matemáticas*. Valencia, Mestral Libros.
- GUÉTMANOVA, A. (1989): *Lógica* (Trad. Víctor Médnikov). Moscú, Progreso.
- GUÉTMANOVA, A. y otros (1991): *Lógica: En forma simple sobre lo complejo*. Moscú, Progreso.
- GUILFORD, J. P. y otros (1983): *Creatividad y educación*. Barcelona, Paidós.
- HOWSON, G. A.; KEITEL, C. y KILPATRICK, J. (1981): *Curriculum Development in Mathematics*. Cambridge, Cambridge University Press.
- IAN STEWART (2004): *De aquí al infinito. Las matemáticas hoy*. Crítica. Barcelona.
- ICMI (1986): *Las matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90*, (Traducido al español en Mestral). Kuwait.

- INHELDER, B. y PIAGET J. (1972): *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires, Paidós.
- JONES, T. P. (1972): *Creative Learning in Perspective*. Nueva York, Wiley & Sons.
- KAMII, C. (1993): *El niño reinventa la aritmética*. Madrid, Visor.
- KANTOWSKI, M. G. (1977): «Processes Involved in Mathematical Problem Solving». *Journal for Research in Mathematics Education*.
- KANTOWSKI, M. G. (1979): *The Use of Heuristics in Problem Solving*. Universidad de Florida.
- KNELLER, G. (1969): *La lógica y el lenguaje en la educación*. Buenos aires, El Ateneo.
- LABARRERE, A. (1987): *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de solución de problemas*. La Habana, Pueblo y Educación.
- LE LIONNAIS, F. (1962): *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires, Editorial Universitaria.
- LIPMAN, M. (1987): «La utilidad de la filosofía en la educación de la juventud». *Revista de Filosofía y de Didáctica de la Filosofía*, III, 3.
- LÓPEZ QUINTÁS, A. (1974): *El lenguaje y el conocimiento. Hallazgos del pensamiento dialógico y necesidad de una metodología más aquilatada. Homenaje a Juan Berchmans Vallet de Goytisolo*. Separata del volumen IV. Consejo General del Notariado.
- MARIMÓN, M. (1996): «De las estructuras a los modelos organizadores». *Cuadernos de Pedagogía*, 244.
- MARINA, J. A. (1994): *Teoría de la inteligencia creadora*. Barcelona, Anagrama.
- MARTÍNEZ, M.; BUJONS, C. y BUXARRAIS, M. R. (1988): «El desarrollo de la autonomía como principio pedagógico. Aspectos teóricos y metodológicos en torno a su estudio». En Actas del Congreso Internacional de Filosofía de la Educación. Madrid, 23-26 de noviembre. *Filosofía de la Educación Hoy*. Vol. 2. Madrid, UNED (1990).
- MASON, J.; BURTON, L. y STACEY, K. (1988): *Pensar matemáticamente*. Barcelona, Labor.
- MAYER RICHARD, E. (1986): *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona, Paidós.

- MIALARET, G. (1977): *Las matemáticas: cómo se aprenden cómo se enseñan*. Madrid, Pablo del Río.
- MOSER, J. M. (ed.) (1984): *Proceedings of the Sixth Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Madison Wesley.
- NCTM (1990): *Sugerencias para resolver problemas*. México, Trillas.
- NCTM (1991): *Estándares curriculares y para la evaluación*. SAEM Thales.
- NESHER, P. (1980): «The Stereotyped Nature of School Word Problems». *For the Learning of Mathematics*. Vol. 1.
- ORTEGA, R. (1990): «El grupo aula como un sistema de relaciones socio-afectivas». *Investigación en la escuela*, 10.
- PERKINS, D. N. (1980): *Características de la creatividad*. Material mimeografiado. Proyecto Inteligencia. Venezuela, Ministerio de Educación de Venezuela.
- PERKINS, D. N. (1983): «Teaching Inventive Thinking». En *Project Intelligence: The Development of Procedures to Enhance Thinking Skills*. Harvard University.
- PIAGET, J y BETH. E. W. (1968): *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Madrid, Ciencia Nueva.
- PIAGET, J.; CHOQUET G. y otros (1978): *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid, Alianza Editorial.
- PLATÓN. *Teeteto*, 146 C3.
- POLYA, G. (1992): *Cómo plantear y resolver problemas*. México, Trillas.
- POLYA, G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible* (Trad. José Luis Abellán). Madrid, Tecnos.
- POOPER, K. (1973): *La lógica de la investigación científica* (Trad. Víctor Sánchez de Zabala). Madrid, Tecnos.
- POZO, J. L. (1990): *Estrategias de aprendizaje*. Madrid, Alianza.
- RAMÓN Y CAJAL, S. (1982): *Los tónicos de la voluntad*. Madrid, CSIC.
- RICO, L. (1990): «Diseño curricular en educación matemática: Una perspectiva cultural». *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. Sevilla, Alfar.
- RUBINSTEIN, S. L. (1966): *El proceso del pensamiento*. La Habana. Editorial Universitaria.

- RUE, J. (1990): *Els agrupaments d'alumnes. Anàlisi de la modalitat de 'grups flexibles*. Ponencia del I Congreso Interuniversitario de Organización Escolar. Barcelona, U.A.B.
- RUSSELL, B. (1984): «El estudio de las matemáticas». *Obras completas* (Misticismo y lógica y otros ensayos, 1917).
- SÉMÉNADISSE, B. y CAUSSIGNAC G. (1985): *Situations-problèmes*. Francia, Nathan.
- SHULMAN, L. (1974): *Aprendizaje por descubrimiento*. México, Trillas.
- STEWART, I. (2004): *De aquí al infinito. Las matemáticas hoy*. Crítica, Barcelona.
- SUJOMLINSKI, V. (1986): *Entrego mi corazón a los niños*. Moscú, Progreso.
- SWINBURNE, R. (1976): *La justificación del razonamiento inductivo*. Madrid, Alianza Universidad.
- VELÁZQUEZ MANUEL, F. (1995): «La relación entre cultura escolar y personalidad: delimitando la diversidad de género». *Revista UNO*, 6. Barcelona, Grao.
- VYGOTSKI, L. S. (1979): *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona, Crítica Grijalbo.
- WALLAS, G. (1926): *The Art of Thought*. New York, Harcourt Brace Jovanovich.
- WERTHEIMER, M. (1959): *Productive Thinking*. Nueva York, Harper & Row.
- WITTGENSTEIN, L. (1987): *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid, Alianza Editorial.
- WITTROCK, M. C. (1979): «The Cognitive Movement in Instruction» *Educational Researcher*, 8.
- YOUNG, L. W. (1947): *Fines, valor y método de la enseñanza matemática*. Buenos Aires, Losada.

